

UNIVERSITATEA “POLITEHNICA” DIN TIMIȘOARA

Facultatea de Electronică și Telecomunicații

EXAMEN LICENȚĂ

SPECIALIZAREA

TEHNOLOGII ȘI SISTEME DE  
TELECOMUNICAȚII

*- INVĂȚĂMÂNT LA DISTANȚA -*

2012-2013

# **UNITĂȚI DE MĂSURĂ**

## **ale Sistemului International**

1. Specificați unitatea SI pentru masă și simbolul ei. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru micro (exemplu: atto =  $10^{-18}$ , a).  
*Unitatea SI pentru masă este kilogramul. Simbolul său este kg. Factorul de multiplicare pentru micro este  $10^{-6}$ . Simbolul său este  $\mu$ .*
2. Specificați unitatea SI pentru lungime. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru mili (exemplu: atto =  $10^{-18}$ , a).  
*Unitatea SI pentru lungime este metrul. Simbolul său este m. Factorul de multiplicare pentru mili este  $10^{-3}$ . Simbolul său este m.*
3. Specificați unitatea SI pentru timp. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru micro (exemplu: atto =  $10^{-18}$ , a).  
*Unitatea SI pentru timp este secunda. Simbolul său este s. Factorul de multiplicare pentru micro este  $10^{-6}$ . Simbolul său este  $\mu$ .*
4. Specificați unitatea SI pentru curentul electric. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru mili (exemplu: atto =  $10^{-18}$ , a).  
*Unitatea SI pentru curentul electric este amperul. Simbolul său este A. Factorul de multiplicare pentru mili este  $10^{-3}$ . Simbolul său este m.*
5. Specificați unitatea SI pentru viteza unghiulară. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru kilo (exemplu: atto =  $10^{-18}$ , a).  
*Unitatea SI pentru angular viteza unghiulară este radianul pe secundă. Simbolul său este rad/s. Factorul de multiplicare pentru kilo este  $10^3$ . Simbolul său este k.*
6. Specificați unitatea SI pentru frecvență. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru tera (exemplu: atto =  $10^{-18}$ , a).  
*Unitatea SI pentru frecvență este herțul. Simbolul său este Hz. Factorul de multiplicare pentru tera este  $10^{12}$ . Simbolul său este T.*
7. Specificați unitatea SI pentru energie, lucru mecanic și căldură. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru mega (exemplu: atto =  $10^{-18}$ , a).  
*Unitatea SI pentru energie, lucru mecanic și căldură este jouleul. Simbolul său este J. Factorul de multiplicare pentru mega este  $10^6$ . Simbolul său este M.*
8. Specificați unitatea SI pentru putere și flux radiant. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru giga (exemplu: atto =  $10^{-18}$ , a).  
*Unitatea SI pentru putere și flux radiant este wattul. Simbolul său este W. Factorul de multiplicare pentru giga este  $10^9$ . Simbolul său este G.*
9. Specificați unitatea SI pentru for sarcină electrică și cantitate de electricitate. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru femto (exemplu: atto =  $10^{-18}$ , a).  
*Unitatea SI pentru sarcină electrică și cantitate de electricitate este coulombul. Simbolul său este C. Factorul de multiplicare pentru femto este  $10^{-15}$ . Simbolul său este f.*
10. Specificați unitatea SI pentru tensiune electrică, diferență de potențial și tensiune electromotoare. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru nano (exemplu: atto =  $10^{-18}$ , a).  
*Unitatea SI pentru tensiune electrică, diferență de potențial și tensiune electromotoare este voltul. Simbolul său este V. Factorul de multiplicare pentru nano este  $10^{-9}$ . Simbolul său este n.*

11. Specificați unitatea SI pentru intensitatea câmpului electric. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru mega (exemplu: atto =  $10^{-18}$ , a).  
*Unitatea SI pentru intensitatea câmpului electric este voltul pe metru. Simbolul său este V/m.  
Factorul de multiplicare pentru mega este  $10^6$ . Simbolul său este M.*
12. Specificați unitatea SI pentru rezistență electrică, impedanță și reactanță. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru kilo (exemplu: atto =  $10^{-18}$ , a).  
*Unitatea SI pentru rezistență electrică, impedanță și reactanță este ohmul. Simbolul său este  $\Omega$ . Factorul de multiplicare pentru kilo este  $10^3$ . Simbolul său este k.*
13. Specificați unitatea SI pentru conductanța electrică. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru kilo (exemplu: atto =  $10^{-18}$ , a).  
*Unitatea SI pentru conductanța electrică este siemensul. Simbolul său este S. Factorul de multiplicare pentru kilo este  $10^3$ . Simbolul său este k.*
14. Specificați unitatea SI pentru capacitatea electrică. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru pico (exemplu: atto =  $10^{-18}$ , a).  
*Unitatea SI pentru capacitatea electrică este faradul. Simbolul său este F. Factorul de multiplicare pentru pico este  $10^{-12}$ . Simbolul său este p.*
15. Specificați unitatea SI pentru inductanță. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru mili (exemplu: atto =  $10^{-18}$ , a).  
*Unitatea SI pentru inductanță este henry. Simbolul său este H. Factorul de multiplicare pentru mili este  $10^{-3}$ . Simbolul său este m.*

# **Noțiuni generale de fizică**

### 1. Enunțați legea lui Coulomb

**Răspuns** – Forța de natură electrică ce se exercită între două sarcini electrice punctiforme este direct proporțională cu produsul celor două sarcini și invers proporțională cu pătratul distanței dintre cele două sarcini.

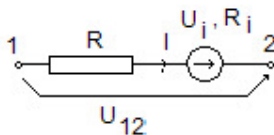
$$\vec{F} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

unde semnificația mărimilor este:  $q_1$  și  $q_2$  - cele două sarcini punctiforme,  $\vec{r}_1$  și  $\vec{r}_2$  - vectorii de poziție ai sarcinilor punctiforme,  $\epsilon_0$  - permitivitatea dielectrică a vidului, mediului în care se găsesc cele două sarcini punctiforme fiind vidul.

### 2. Enunțați legea conducției pentru conductoare filiforme cu sursă de tensiune imprimată (legea generală a lui Ohm)

**Răspuns** - Suma între tensiunea la capetele unei porțiuni neramificate de circuit liniar filiform și tensiunea imprimată a sursei ce se găsește în acea porțiune, este egală, în fiecare moment, cu produsul între curent și rezistența electrică a porțiunii, produs numit și cădere de tensiune.

Legea conducției pentru conductoare filiforme care nu conțin surse de câmp imprimat (în figura de mai jos  $U_i = 0$ ,  $R_i = 0$ ) se exprimă prin relația,



$$U_{12} = R \cdot I, \text{ respectiv } I = \frac{U_{12}}{R} \text{ (legea lui Ohm)}$$

Dacă conductorul filiform conține sursă de câmp imprimat cu parametrii  $U_i$  – tensiunea imprimată și  $R_i$  – rezistența internă legea conducției se exprimă prin relația

$$U_{12} + U_i = I R_{12}, \text{ respectiv } I = \frac{U_{12} + U_i}{R + R_i} \text{ (legea generală a lui Ohm)}$$

### 3. Enunțați prima teoremă a lui Kirchhoff

**Răspuns** - In orice nod de circuit electric, suma algebrică a curenților electrici este egală cu zero. (Suma curenților care intră în nod este egală cu suma curenților care ies din nod).

Prima teoremă a lui Kirchhoff se exprimă prin relația,

$$\sum_i I_i = 0$$

unde curenții care ies din nod se consideră cu semnul plus, iar cei care intră în nod se consideră cu semnul minus.

#### 4. Enunțați a doua teorema a lui Kirchhoff

**Răspuns** - De-a lungul oricărui ochi de circuit electric, suma algebrică a căderilor de tensiune este egală cu suma algebrică a tensiunilor electromotoare.

A doua teoremă a lui Kirchhoff se exprimă prin relația,

$$\sum_i R_i I_i = \sum_j U_{e_j}$$

Tensiunile electromotore ( $U_{e_j}$ ) se consideră cu semnul plus dacă sensul acestora coincide cu cel de parcurgere al ochiului, respectiv cu semnul minus dacă sensul acestora este invers celui de parcurgere al ochiului. Căderile de tensiune (termeni  $R_i I_i$ ) se consideră cu semnul plus dacă sensul curentului ( $I_i$ ) coincide cu sensul de parcurgere al ochiului, respectiv cu semnul minus dacă sensul acestuia este invers sensului de parcurgere al ochiului.

#### 5. Enunțați forma integrală a legii inducției electromagnetice

**Răspuns** - Tensiunea electromotoare indusă de-a lungul unui contur închis  $\Gamma$  este egală cu derivata în raport cu timpul, luată cu semn schimbat, a fluxului magnetic prin suprafața  $S_\Gamma$  ce se sprijină pe acel contur.

Forma integrală a legii se exprimă prin relația,

$$u_{e\Gamma} = - \frac{d\Phi_\Gamma}{dt}$$

unde  $u_{e\Gamma}$  este tensiunea electromotoare indusă în circuitul ce definește conturul  $\Gamma$ ,  $\Phi_\Gamma$  este fluxul magnetic printr-o suprafață oarecare deschisă ce se sprijină pe curba  $\Gamma$ ,  $\vec{B}$  este vectorul inducție magnetică în punctele ce aparțin suprafeței  $S_\Gamma$ .

#### 6. Să se definească puterea activă în regim sinusoidal

**Răspuns** - Puterea activă se definește pentru un circuit electric dipolar care funcționează în regim sinusoidal ca fiind valoarea medie pe o perioadă a produsului dintre valorile instantanee ale tensiunii și curentului.

Puterea activă se exprimă prin relația,

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u_m \sin \omega t \cdot i_m \sin(\omega t - \varphi) dt = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

unde  $P$  este puterea activă,  $u_m \sin \omega t$  - tensiunea la bornele consumatorului,  $U$  - valoarea efectivă a tensiunii la bornele consumatorului,  $i_m \sin(\omega t - \varphi)$  - curentul consumatorului,  $I$  - valoarea efectivă a curentului prin consumator,  $T$  - perioada tensiunii și curentului ( $T = \frac{1}{f}$ ),  $\omega$  - pulsația tensiunii și a curentului ( $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  fiind frecvența tensiunii și curentului),  $\varphi$  - defazajul dintre tensiunea și curentul consumatorului, iar  $t$  - este timpul.

Unitatea de măsură a puterii active, în Sistemul Internațional de unități, se numește Watt, notându-se cu  $W$ .

#### 7. Să se definească puterea reactivă în regim sinusoidal

**Răspuns** - Puterea reactivă se definește ca fiind produsul dintre valoarea efectivă a tensiunii la bornele consumatorului, valoarea efectivă a curentului prin consumator și sinusul unghiului de defazaj dintre tensiunea și curentul consumatorului.

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

unde  $Q$  – este puterea reactivă,  $U$  – valoarea efectivă a tensiunii la bornele consumatorului,  $I$  – valoarea efectivă a curentului prin consumator,  $\varphi$  – defazajul dintre tensiunea și curentul consumatorului.

Unitatea de măsură a puterii reactive, în Sistemul Internațional de unități, se numește volt-ampere reactiv, notându-se cu VAR.

#### 8. Să se definească puterea aparentă în regim sinusoidal

**Răspuns** – Puterea aparentă se definește ca fiind produsul dintre valoarea efectivă a tensiunii la bornele consumatorului și valoarea efectivă a curentului prin consumator.

$$S = U \cdot I$$

unde  $S$  – este puterea aparentă,  $U$  – valoarea efectivă a tensiunii la bornele consumatorului,  $I$  – valoarea efectivă a curentului prin consumator.

Unitatea de măsură a puterii aparente, în Sistemul Internațional de unități, se numește volt-ampere, notându-se cu VA.

#### 9. Să se definească capacitatea electrică

**Răspuns** – Capacitatea electrică este un parametru global ce caracterizează condensatorul ideal și se definește prin relația,

$$C = \frac{Q}{U}$$

unde  $Q$  – este sarcina electrică a armăturii pozitive, iar  $U$  – este diferența de potențial (tensiunea) dintre cele două armături.

Capacitatea electrică a unui condensator indică posibilitățile acestuia de a înmagazina energie electrică.

Unitatea de măsură a capacității electrice, în Sistemul Internațional de unități, se numește Farad, notându-se cu F.

#### 10. Să se definească tensiunea electrică dintre două puncte

**Răspuns** – Tensiunea electrică dintre două puncte este o mărime globală și se definește ca fiind integrala curbilinie a vectorului intensitate de câmp electric. Relația matematică ce definește tensiunea electrică între două puncte este,

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2$$

unde  $\vec{E}$  – este intensitatea câmpului electric,  $d\vec{l}$  – este elementul de linie al curbei în lungul căreia se efectuează integrala,  $V_1$  – este potențialul din punctul 1, iar  $V_2$  – este potențialul din punctului 2.

În regimuri statice și staționare tensiunea electrică nu depinde de traseul pe care se efectuează integrala. În regimuri variabile tensiunea electrică depinde de traseul după care se efectuează integrala, caz în care câmpul electric nu mai este un câmp potențial.

Unitatea de măsură a tensiunii electrice, în Sistemul Internațional de unități, se numește Volt, notându-se cu V.

#### 11. Să se definească intensitatea curentului electric

**Răspuns** – Intensitatea curentului electric se definește ca fiind egală cu sarcina electrică ce străbate secțiunea transversală a unui conductor în unitate de timp. Relația matematică ce definește intensitatea curentului electric este,

$$i = \frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

unde  $Q$  – este sarcina electrică,  $d\vec{s}$  – este elementul de suprafață al secțiunii transversale prin conductor ( $S$ ),  $\vec{J}$  – este densitatea curentului de conducție, iar  $t$  – este timpul.

Unitatea de măsură a curentului electric, în Sistemul Internațional de unități, se numește Amper, notându-se cu A.



## 12. Enunțați teorema lui Ampere

**Răspuns** – Integrala vectorului intensitate de câmp magnetic pe orice curbă închisă  $\Gamma$  (tensiunea magnetomotore sau solenație) este egală cu integrala vectorului densitate de curent de conducție pe orice suprafață deschisă  $S_\Gamma$  ce se sprijină pe curba închisă  $\Gamma$ .

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{s} = i$$

unde  $i$  – este curentul electric de conducție prin suprafața  $S_\Gamma$ ,  $\vec{H}$  – este intensitatea câmpului magnetic,  $\vec{J}$  – este densitatea curentului de conducție,  $d\vec{s}$  – este elementul de suprafață al suprafeței  $S_\Gamma$ .

Unitatea de măsură a tensiunii magnetice, în Sistemul Internațional de unități, se numește Amper, notându-se cu A.

## 13. Să se definească inductanța unei bobine

**Răspuns** – Inductanța unei bobine se definește ca fiind raportul dintre înălțuirea magnetică totală a bobinei și curentul se pacurge spirele bobinei.

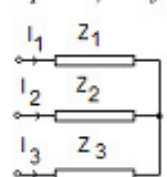
$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{N\phi}{i}$$

unde  $i$  – este curentul electric de conducție ce parcurge spirele bobinei,  $\psi$  – este înălțuirea magnetică totală a bobinei,  $\Phi$  – este fluxul magnetic mediu prin spirele bobinei, iar  $N$  – este numărul de spire al bobinei.

Unitatea de măsură a inductanței magnetice, în Sistemul Internațional de unități, se numește Henry, notându-se cu H.

## 14. Să se definească conexiunea stea la un consumator trifazat (caracteristici)

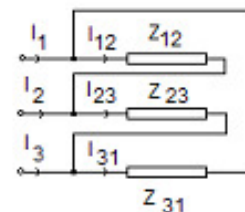
**Răspuns** – Conexiunea stea a unui consumator trifazat este aceea la care cele trei impedanțe de fază au un nod comun (ca în figura alăturată).



Dacă cele trei impedanțe de fază sunt egale, ca mărimi complexe ( $Z_1, Z_2, Z_3$ ) consumatorul trifazat este echilibrat. Un astfel de consumator se bucură de proprietatea că tensiunea de linie  $U_l$  satisface relația  $U_l = \sqrt{3} \cdot U_f$ , iar  $I_l = I_f$ . Tensiunea de fază ( $U_f$ ) reprezintă căderea de tensiune pe impedanțele de fază, iar tensiunea de linie ( $U_l$ ) reprezintă tensiunea dintre două faze. Curenții de fază ( $I_1, I_2, I_3$  – din figură) reprezintă acei curenți ce parcurg impedanțele de fază, iar curenții de linie sunt cei care parcurg linia electrică dintre sursa trifazată și consumatorul trifazat. La conexiunea stea curenții de linie sunt identici cu cei de fază.

## 15. Să se definească conexiunea triunghi la un consumator trifazat (caracteristici)

**Răspuns** – Conexiunea triunghi a unui consumator trifazat este aceea la care sfârșitul unei impedanțe este conectat cu începutul următoarei impedanțe (ca în figura alăturată).



Dacă cele trei impedanțe de fază sunt egale, ca mărimi complexe ( $Z_{12}, Z_{23}, Z_{31}$ ) consumatorul trifazat este echilibrat. Un astfel de consumator se bucură de proprietatea că tensiunea de linie  $U_l$  satisface relația  $U_l = U_f$ , iar  $I_l = \sqrt{3} \cdot I_f$ . Tensiunea de fază ( $U_f$ ) reprezintă căderea de tensiune pe impedanțele de fază, iar tensiunea de linie ( $U_l$ ) reprezintă tensiunea dintre două faze. Curenții de fază ( $I_{12}, I_{23}, I_{31}$  – din figură) reprezintă acei curenți ce parcurg impedanțele de fază, iar curenții de linie sunt cei care parcurg linia electrică dintre sursa trifazată și consumatorul trifazat ( $I_1, I_2, I_3$ ). La conexiunea triunghi tensiunile de linie sunt identici cu cele de fază.

**CONCEPTE / TEOREME MATEMATICE DE UZ  
PRACTIC  
ÎN EXERCITAREA PROFESIEI DE INGINER**

**1. Prezențați Formula lui Taylor pentru funcții de o variabilă și modul cum se utilizează în aproximarea funcțiilor prin polinoame.**

**Răspuns:**

Fie  $f: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  și  $x_0 \in I, f \in C_I^{n+1}$ . Are loc formula lui Taylor

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

unde  $T_n$  este polinomul lui Taylor de ordin  $n$ , iar  $R_n$  este restul

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)), 0 < \theta < 1.$$

Rezultă formula de aproximare pentru  $f(x)$  într-o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ :

$$f(x) \cong T_n(x),$$

cu eroarea  $\varepsilon_n = \sup_{x \in V} |R_n(x)|$ .

**2. Definiți noțiunile de valori și vectori proprii ai unui operator liniar.**

**Răspuns:**

Fie  $V$  un spațiu vectorial peste corpul  $\mathbf{K}$  și  $f: V \rightarrow V$  un operator liniar. Un vector nenul  $v \in V$  se numește vector propriu al operatorului  $f$  dacă există un scalar  $\lambda$  din  $\mathbf{K}$  a.î.  $f(v) = \lambda v$ . Scalarul  $\lambda$  se numește valoare proprie.

**3. Menționați modul de determinare al extremelor unei funcții de 2 variabile, derivabilă parțial.**

**Răspuns:**

Extremele funcției  $u = u(x, y)$  se găsesc printre punctele staționare asociate, care sunt

$$\text{soluțiile sistemului } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Un punct staționar este punct de minim dacă  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0$  și  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0$ ,

respectiv este punct de maxim dacă  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0$  și  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0$ .

#### 4. Definiți următoarele noțiuni: media aritmetică, media aritmetică ponderată și media geometrică.

##### Răspuns:

Fie  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  o mulțime nevidă de date (numere reale) cu ponderile nenegative  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ .

Media ponderată este  $M_p = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$ , (elementele care au ponderi mai mari contribuie mai mult la medie). Formula poate fi simplificată când ponderile sunt normalizate, adică:  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . În acest caz  $M_p = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ .

Media aritmetică  $M_a$  este un caz particular al mediei ponderate  $M_p$  în care toate ponderile sunt egale  $p_i = \frac{1}{n}$ .

Avem  $M_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$  ( $M_a$  indică tendința centrală a unui set de numere).

Media geometrică  $M_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$  dacă  $x_i > 0, i = \overline{1, n}$ . Media geometrică are următoarea interpretare geometrică. Media geometrică  $M_g = \sqrt{ab}$ , a două numere  $a, b \in \mathbf{R}_+$  este egală cu latura unui pătrat cu aceeași suprafață ca și un dreptunghi cu laturile  $a$  și  $b$ .

#### 5. Definiți noțiunea de probabilitate condiționată, enunțați și interpretați formula lui Bayes.

##### Răspuns:

Fie  $\{E, K, P\}$  un câmp de probabilitate și  $A, B \in K$  două evenimente cu  $P(A) \neq 0$ . Se numește probabilitate a evenimentului  $B$  condiționată de  $A$  expresia:

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Fie  $S = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  un sistem complet de evenimente.

Deci  $E = \bigcup_{i=1}^n B_i, B_i \in K, B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$ . Se mai spune că sistemul  $S$  este o desfacere a evenimentului sigur  $E$ , iar evenimentele  $B_i$  se numesc cauze.

##### Formula lui Bayes

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{j=1}^n P(B_j) \cdot P_{B_j}(A)}$$

Această formulă exprimă probabilitatea unei cauze în ipoteza că evenimentul  $A$  s-a produs sau mai precis este probabilitatea că producerea evenimentului  $A$  să fie determinată de cauza  $B_i$ .

**6. Definiți pentru o variabilă aleatoare discretă următoarele caracteristici numerice: valoarea medie, dispersia și abaterea medie pătratică.**

**Răspuns:**

Fie  $\xi$  o variabilă aleatoare discretă cu distribuția

$$\xi : \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ p_1, p_2, \dots, p_n \end{pmatrix}, \sum_{i=1}^n p_i = 1, p_i = P(\xi = x_i)$$

Valoarea medie  $M(\xi) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ . Valoarea medie reprezintă o valoare în jurul căreia se constată o grupare a valorilor variabilelor aleatoare.

Dispersia  $D^2(\xi) = \sigma^2 = M[(\xi - M(\xi))^2]$

Abaterea medie pătratică  $D(\xi) = \sigma = \sqrt{D^2(\xi)}$ .

Dispersia și abaterea medie pătratică sunt indicatori care caracterizează "împrăștierea" valorilor unei variabile aleatoare dând o indicație asupra gradului de concentrare a valorilor variabilei în jurul valorii sale medii.

**7. Definiți transformata Laplace și stabiliți formula de calcul a derivatei.**

**Răspuns:**

Dacă  $f$  este o funcție original, transformata Laplace a lui  $f$  este:

$$(Lf)(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Imaginea derivatei

$$(Lf')(s) = s(Lf)(s) - f(0_+)$$

**8. Definiți Transformata Z (Laplace discretă) și calculați imaginea ei pentru semnalul discret treaptă - unitate.**

**Răspuns:**

Dacă  $\{f_n\}$  este un șir original, transformata Z a lui este:

$$Z(f_n)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}.$$

Pentru șirul treaptă - unitate

$$\sigma(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0, \quad n \in Z \end{cases}$$

transformata Z este

$$Z\sigma(n)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}, \text{ pentru } |z| > 1.$$

9. Coordonate polare, cilindrice și sferice.

**Răspuns:**

a). *Trecerea la coordonate polare:*

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

unde

$$\rho \in [0, \infty); \varphi \in [0, 2\pi),$$

stabilește legătura între coordonatele carteziane  $(x, y)$  ale unui punct din plan și coordonatele polare  $(\rho, \varphi)$  ale aceluiași punct.

b). *Trecerea la coordonate cilindrice:*

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

unde

$$\rho \in [0, \infty); \varphi \in [0, 2\pi); z \in \mathbf{R},$$

stabilește legătura între coordonatele carteziane  $(x, y, z)$  ale unui punct din spațiu și coordonatele cilindrice  $(\rho, \varphi, z)$  ale aceluiași punct.

c). *Trecerea la coordonatele sferice:*

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

unde

$$\rho \in [0, \infty); \varphi \in [0, 2\pi); \theta \in [0, \pi],$$

stabilește legătura între coordonatele carteziane  $(x, y, z)$  ale unui punct din spațiu și coordonatele sferice  $(\rho, \varphi, \theta)$  ale aceluiași punct.

10. Mărimi geometrice sau fizice care se calculează cu ajutorul integralelor. Formula de calcul a fluxului unui câmp vectorial.

**Răspuns:**

Aria unui domeniu plan, volumul unui corp, masa, centrul de greutate, momentele de inerție, lucrul mecanic.

Fie  $S$  o suprafață netedă și  $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  un câmp vectorial continuu pe  $S$ . Fluxul câmpului  $\vec{v}$  prin suprafața  $S$  orientată de versorul normalei  $\vec{n} = (\cos \alpha)\vec{i} + (\cos \beta)\vec{j} + (\cos \gamma)\vec{k}$  la suprafața  $S$  este  $\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$ .

11. Derivata după o direcție a unei funcții reale. Noțiunile de gradient, divergență și rotor.

**Răspuns:**

Fie  $f : D \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x, y, z)$  un câmp scalar și  $\vec{s} \in \mathbf{R}^3$ ,  $\|\vec{s}\| = 1$  un versor  $\vec{a} \in D$ . Numim derivata funcției  $f$  în punctul  $\vec{a}$  după direcția  $\vec{s}$  următoarea limită

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\vec{a} + t\vec{s}) - f(\vec{a})] = \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{a})$$

Derivata  $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{a})$  caracterizează viteza de variație a funcției  $f$  în punctul  $\vec{a}$  după

direcția  $\vec{s}$ . Numim gradientul funcției  $f$  în punctul  $\vec{a}$  următorul vector

$$\text{grad } f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a})\vec{k}$$

unde Nabla este operatorul lui Hamilton  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ .

Se arată că  $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{a}) = \vec{s} \cdot \nabla f(\vec{a})$  adică derivata câmpului scalar în  $\vec{a}$  după direcția  $\vec{s}$  este egală cu produsul scalar al gradientului cu versorul  $\vec{s}$ .

Rezultă de aici că direcția gradientului unui câmp scalar este aceea după care derivata după o direcție are valoarea maximă, adică câmpul are cea mai rapidă variație.

Fie  $\vec{v} : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  un câmp vectorial pe mulțimea deschisă  $U \subset \mathbf{R}^3$ ,  $\vec{v} = (P, Q, R)$ .

Divergența câmpului  $\vec{v}$  într-un punct curent din  $U$  este scalarul (numărul):

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{v}$$

Rotorul câmpului  $\vec{v}$  într-un punct curent din  $U$  este vectorul:

$$\text{rot } \vec{v} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \nabla \times \vec{v}$$

12. Să se scrie seria și coeficienții Fourier pentru un semnal periodic continuu.

**Răspuns:**

Fie  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție integrabilă și periodică de perioadă  $T$  și  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  pulsația.

Coeficienții Fourier sunt:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt, n = 0, 1, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt, n = 1, 2, \dots$$

Seria Fourier asociată lui f este:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

13. Definiția transformatei Fourier. Formula de inversare Fourier.

**Răspuns:**

Transformata Fourier a unei funcții absolut integrabile  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  este:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Formula de inversare Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

14. Să se scrie formula de filtrare și transformata Fourier pentru impulsul unitate.

**Răspuns:**

Formula de filtrare este:  $\delta(x - x_0) = \delta_{x_0}$ , unde  $\delta$  este distribuția lui Dirac.

Transformata Fourier este:  $\hat{\delta} = 1$ .

15. Să se rezolve problema Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = a(t) x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

unde funcția  $a = a(t)$  este continuă.

**Răspuns:**

Scriem ecuația sub forma

$$\frac{x'(s)}{x(s)} = a(s),$$

cu  $s$  arbitrar, și integrăm între  $t_0$  și  $t$ :

$$\ln x(t) - \ln x(t_0) = \int_{t_0}^t a(s) ds \iff \ln \frac{x(t)}{x(t_0)} = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

de unde

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}.$$