

Cea mai bună aproximare a vectorului $OA=x$ cu elemente din planul generat de versorii \vec{u}_2 și \vec{u}_3 este dată de vectorul $OB=\tilde{x}$, proiecția vectorului OA pe acest plan (H_s).

În acest caz, eroarea de aproximare este dată de vectorul $BA=e$, care este într-adevăr ortogonal pe H_s (așa după cum afirmă cea de a doua consecință a teoremei proiecției).

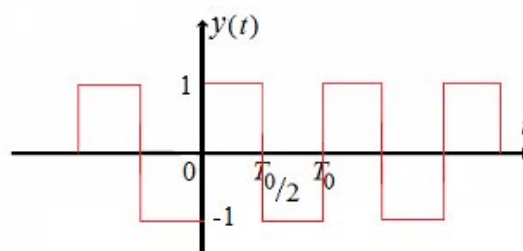
Dacă se consideră că spațiul Hilbert H are dimensiunea n fiind generat de baza $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ și că spațiul Hilbert H_s este generat de baza $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ cu $m < n$ atunci cea mai bună aproximare a lui

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k \text{ cu elemente din } H_s \text{ este pe baza teoremei proiecției } \tilde{x} = \sum_{k=1}^m \langle x, u_k \rangle u_k \text{ obținut prin}$$

trunchierea descompunerii lui x la un număr de m elemente.

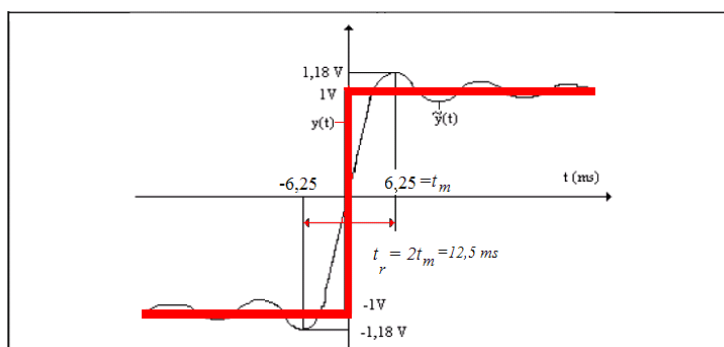
4. Fenomenul Gibbs

În anul 1898, Albert Michelson, fizician experimental, a construit primul analizor de spectru. El a dorit să facă analiza spectrală a semnalului periodic din figura de mai jos.



Unda dreptunghiulară cu factorul de umplere 0,5
fara componenta continua.

Fiind de bandă limitată, ca orice aparat experimental, analizorul său nu a putut să măsoare componentele armonice ale semnalului decât până la un anumit ordin. Folosind aceste valori, Michelson a încercat să reconstruiască semnalul analizat, dar în loc să obțină forma de undă reprezentată cu roșu în figura următoare, a obținut forma de undă reprezentată cu negru.



Fenomenul Gibbs pentru o undă rectangulară cu $T_0=1s$ (factor de umplere 0,5).

Neînțelegând motivul pentru care s-a obținut prin reconstrucție o formă de undă diferită de cea analizată, Michelson i-a cerut ajutorul lui Gibbs. Acesta i-a oferit explicația următoare.

Descompunerea în serie Fourier trigonometrică a semnalului din prima figură este:

$$y(t) = \frac{4}{\pi} \sin \omega_0 t + \frac{4 \sin 3\omega_0 t}{3\pi} + \dots$$

și are o infinitate de termeni. Trunchiind această descompunere la primii săi n termeni, se obține aproximarea:

$$\tilde{y}(t) = \frac{4}{\pi} \sin \omega_0 t + \frac{4 \sin 3\omega_0 t}{3\pi} + \dots + \frac{4 \sin(2n-1)\omega_0 t}{(2n-1)\pi} = \frac{4\omega_0}{\pi} \int_0^t [\cos \omega_0 \tau + \cos 3\omega_0 \tau + \dots + \cos(2n-1)\omega_0 \tau] d\tau ,$$

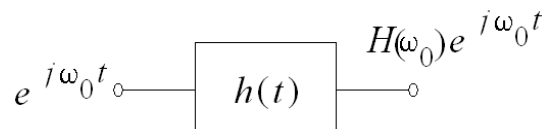
sau, exprimând în formă compactă suma de cosinusuri și aproximând cu ajutorul funcției sinus integral Si :

$$\tilde{y}(t) \approx \frac{2}{\pi} Si(2n\omega_0 t)$$

al cărei grafic este tocmai curba neagră din ultima figură. Osculațiile sale au condus la denumirea de fenomen Gibbs, specific tuturor reconstrucțiilor prin trunchiere.

5. Răspunsul sistemelor liniare și invariante în timp continuu la semnale periodice. Metoda armonică

Exponențiala complexă de modul unitar este funcție proprie pentru orice sistem liniar și invariant în timp, așa cum este ilustrat în figura următoare.



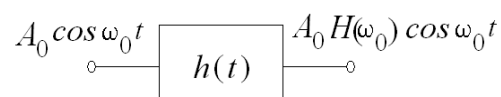
Valoarea proprie corespunzătoare este răspunsul în frecvență al sistemului calculat la frecvența exponențialei complexe (ω_0).

Dacă la intrarea sistemului se aduce o combinație liniară de exponențiale complexe,

$$x(t) = \sum_k c_k e^{jk\omega_0 t}, \text{ atunci, pe baza principiului suprapunerii efectelor, se va obține semnalul}$$

$$y(t) = \sum_k c_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}.$$

Pentru $c_k = \frac{A_0}{2}$ pentru $k = \pm 1$ și $c_k = 0$ în rest, se obține metoda armonică, prezentată în figura următoare.



Răspunsul poate fi exprimat și în forma echivalentă:

$$A_0 |H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \arg\{H(\omega_0)\})$$

care permite măsurarea caracteristicilor de modul și de fază ale răspunsului în frecvență al sistemului. Pentru valori succesive ale lui ω_0 se măsoară amplitudinea răspunsului, valorile obținute servind la trasarea caracteristicii de modul și faza inițială a răspunsului, valorile obținute servind la trasarea caracteristicii de fază a răspunsului în frecvență al sistemului.

6. Teorema simetriei. Aplicații

Majoritatea proprietăților transformării Fourier sunt valabile pentru semnale de clasă $L^1 \cap L^2$. În cazul semnalelor de clasă L^2 sunt valabile câteva proprietăți suplimentare. Una dintre acestea este teorema simetriei. Enunțul acestei teoreme este următorul.

Transformata Fourier a transformatei Fourier a semnalului $x(t)$ este proporțională cu $x(-t)$.

$$F\{F\{x(t)\}(\omega)\}(t) = 2\pi x(-t).$$

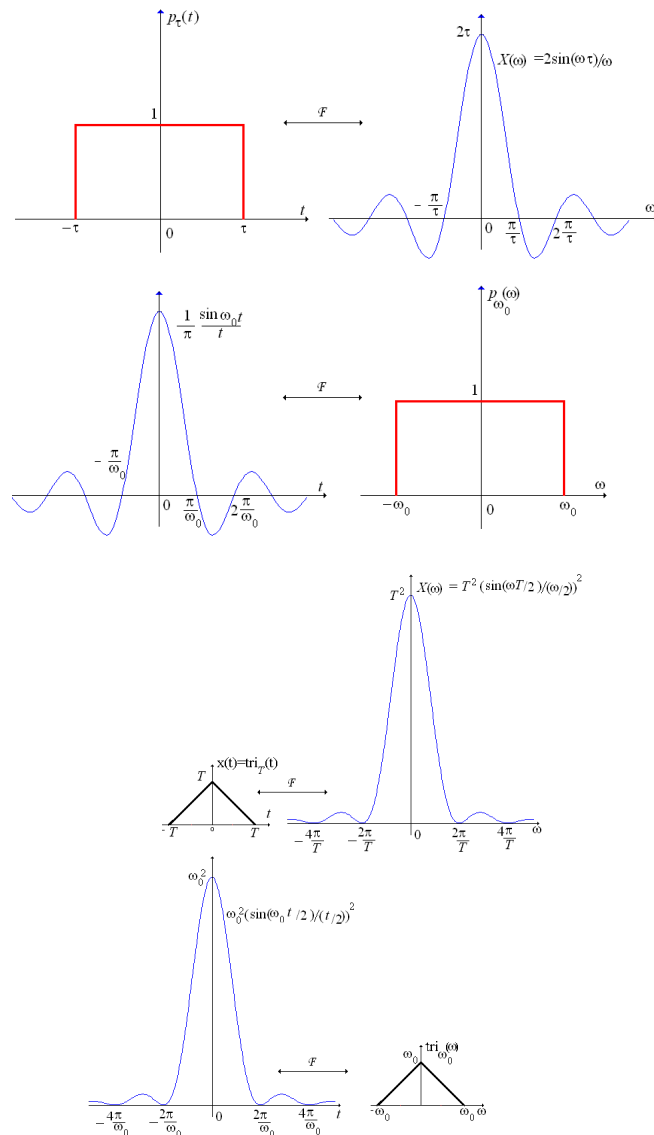
Această teoremă permite calculul transformărilor Fourier ale unor noi semnale pe baza unor transformate Fourier deja cunoscute.

Făcând schimbările de variabile și de constante de forma

$\omega \rightarrow t$ și $t \rightarrow \omega$ se obține schema de calcul a unor noi transformate Fourier din figura de mai jos.

$$\begin{array}{l}
 x(t) \leftrightarrow X(\omega) = F\{x(t)\}(\omega) \\
 X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega) = F\{X(t)\}(\omega)
 \end{array}$$

În continuare se prezintă două aplicații ale acestei teoreme.



7. Relația de incertitudine Heisenberg-Gabor

Este bine cunoscut faptul că semnalele de durată limitată sunt de bandă nelimitată și că semnalele de bandă limitată sunt de durată nelimitată. Totuși este necesară localizarea semnalelor în domeniile timp și frecvență. Pentru localizarea în timp se folosesc două mărimi: timpul central, t_c și dispersia semnalului în jurul timpului central, σ_t^2 , definite după cum urmează:

$$t_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t|x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}, \quad \sigma_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t-t_c)^2|x(t)|^2 dt}{2 \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}.$$

La fel și în domeniul frecvență, pentru localizare se folosește

frecvența centrală, ω_c și dispersia spectrului semnalului în jurul frecvenței centrale, σ_ω^2 , definite în ecuațiile următoare:

$$\omega_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega|X(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega}, \quad \sigma_\omega^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega-\omega_c)^2|X(\omega)|^2 d\omega}{2 \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega}.$$

Cu ajutorul acestor dispersii se poate enunța relația de incertitudine Heisenberg-Gabor. Enunțul său este următorul.

Dacă σ_t și σ_ω pot fi calculate pentru un anumit semnal, atunci este valabilă relația:

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}$$

oricare ar fi semnalul considerat.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă semnalul considerat este Gaussian.

În consecință, dacă localizarea temporală a unui semnal este mai bună decât localizarea temporală a unui alt semnal, atunci localizarea frecvențială a primului semnal va fi mai slabă decât localizarea frecvențială a celui de al doilea semnal. Pentru numeroase semnale σ_t sau σ_ω au valori infinite. Pentru aceste semnale relația lui Heisenberg-Gabor este inoperantă.

8. Diagrame spectrale pentru semnale periodice în timp discret

Caracterizarea în domeniul frecvență a semnalelor periodice în timp discret se face cu ajutorul coeficienților descompunerii în serie Fourier a acestor semnale. Există mai multe tipuri de diagrame spectrale, de modul, de fază și de putere. Diagrama spectrală de modul reprezintă mulțimea dubletelor de forma (modulul coeficientului, frecvența corespunzătoare coeficientului). Diagrama spectrală de fază se referă la dublete de forma (faza coeficientului, frecvența corespunzătoare coeficientului) iar diagrama spectrală de putere la dublete de forma (pătratul modulului

coeficientului, frecvența corespunzătoare coeficientului). Coeficienții Fourier ai semnalului $x[n]$, periodic de perioadă N se calculează cu formula,

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}.$$

Secvența acestor coeficienți este periodică de perioadă N . În continuare se prezintă un exemplu. Se consideră semnalul $x[n] = \sin \frac{2\pi}{N} n$, care este periodic de perioadă N . El poate fi descompus în serie Fourier pe baza celei de a doua formule a lui Euler:

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j \frac{2\pi}{N} n} - \frac{1}{2j} e^{-j \frac{2\pi}{N} n},$$

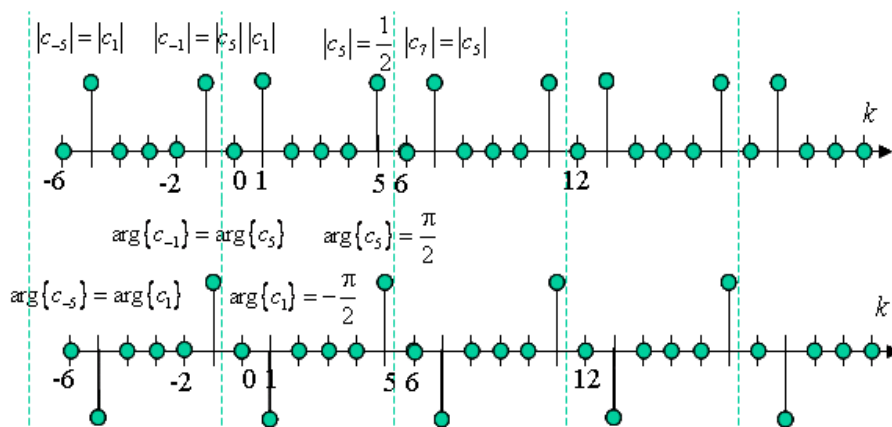
sau, pe baza periodicității exponențialei complexe:

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j \frac{2\pi}{N} n} - \frac{1}{2j} e^{j \frac{2\pi}{N} (N-1)n}.$$

Prin identificare cu formula de descompunere în serie Fourier a semnalelor periodice în timp discret:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n},$$

se obțin valorile celor doi coeficienți Fourier nenuli: $c_1 = \frac{1}{2j}$ și $c_{N-1} = -\frac{1}{2j}$. Pentru $N=6$, se obțin diagramele spectrale de modul și de fază din figura următoare.



9. Funcția de corelație pentru semnale discrete de energie finită

Funcția de corelație a două semnale x și y , măsoară gradul de asemănare dintre aceste două semnale. Ea se mai numește și funcție de intercorelație a semnalelor x și y și pentru semnale de energie finită se definește cu relația:

$$R_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]y[n+k].$$

Spectrul său se numește densitate interspectrală de energie a celor două semnale și poate fi calculat cu relația:

$$S_{XY}(\Omega) = X^*(\Omega)Y(\Omega).$$

În cazul în care cele două semnale sunt identice, $x=y$, vorbim despre autocorelație și despre densitate spectrală de putere. În continuare se prezintă câteva proprietăți ale funcției de autocorelație.

Proprietatea 1. Teorema Wiener-Hincin

Autocorelația unui semnal este pereche Fourier cu densitatea sa spectrală de putere:

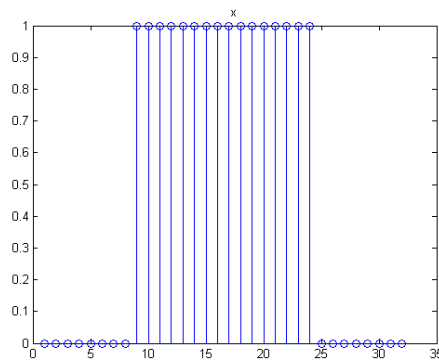
$$R_x[k] \leftrightarrow |X(\Omega)|^2 = S_x(\Omega).$$

Proprietatea 2. Funcția de autocorelație are un maxim în origine. Această valoare este egală cu energia semnalului.

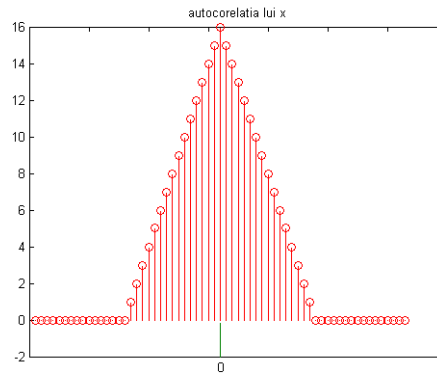
$$W_x = R_x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega.$$

Proprietatea 3. Funcția de corelație este pară.

Se consideră semnalul din figura de mai jos.



Autocorelația sa este reprezentată grafic în figura următoare.



Analizând ultima figură se constată că s-a obținut o funcție pară cu maximul în origine de valoare egală cu energia semnalului din figura anterioară.

10. Relația între densitățile spectrale de putere și de energie ale semnalelor ce trec prin sisteme discrete, liniare și invariante în timp

Sistemul cu răspunsul la impuls $h[n]$ răspunde la semnalul de intrare $x[n]$ cu semnalul $y[n]$. Legătura dintre aceste semnale este dată de ecuația $y[n] = x[n] * h[n]$. Luând în ambii membri transformata Fourier în timp discret, se obține:

$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$ sau $|Y(\Omega)|^2 = |X(\Omega)|^2 |H(\Omega)|^2$ adică $S_y(\Omega) = |H(\Omega)|^2 S_x(\Omega)$. Dacă semnalul $x[n]$ este de energie finită, atunci funcțiile $S_x(\Omega)$ și $S_y(\Omega)$ reprezintă densități spectrale de energie iar dacă semnalul $x[n]$ este de putere medie finită atunci funcțiile $S_x(\Omega)$ și $S_y(\Omega)$ reprezintă densități spectrale de putere.

Dacă semnalul de intrare în sistem este un zgomot alb atunci $S_x(\Omega) = N_0$, o valoare constantă, iar densitatea spectrală de putere a semnalului de la ieșire devine egală cu pătratul modulusului răspunsului în frecvență al sistemului. În consecință, cu ajutorul unui zgomot alb, se poate identifica pătratul modulusului răspunsului în frecvență al unui sistem liniar și invariant în timp discret. Aceasta este o metodă de identificare a răspunsului în frecvență al unui sistem liniar și invariant în timp discret echivalentă cu metoda armonică.

Zona Tematica 5

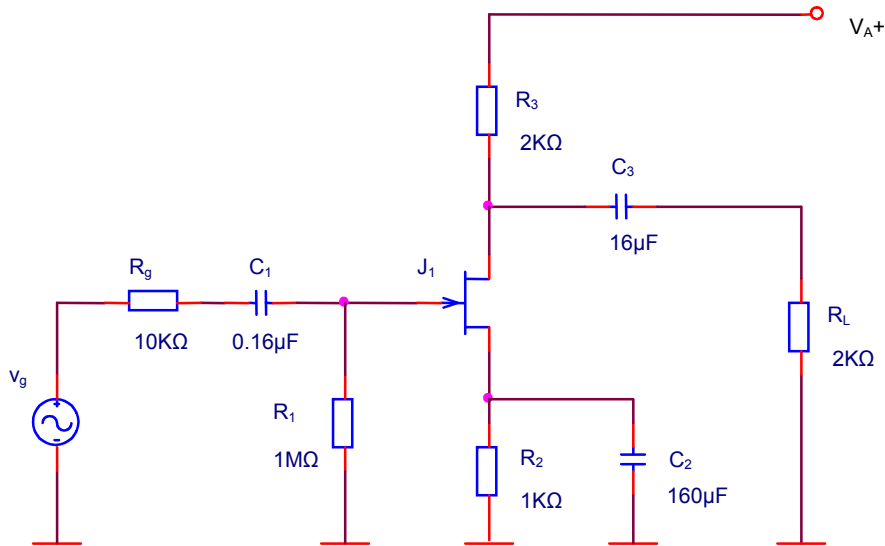
CIRCUITE ELECTRONICE FUNDAMENTALE

- Probleme zona tematică 5 -

11. Se consideră circuitul amplificator din figur de mai jos, pentru care se cunosc parametrii TEC-J: $g_m = 5\text{mA/V}$, $r_{ds} = \infty$, $C_{gd} = 5\text{pF}$, $C_{gs} = 10\text{pF}$, $C_{ds} = 10\text{pF}$.

Să se determine frecvența de trecere la înalte:

- Folosind teorema lui Miller;
- Folosind metoda constantelor de gol.



Bibliografie: Seminar 2, pag. 6

https://intranet.etc.upt.ro/~CEF_A/

Rezolvare:

Se desenează schema echivalentă la frecvențe înalte și semnal mic (fig. 9).

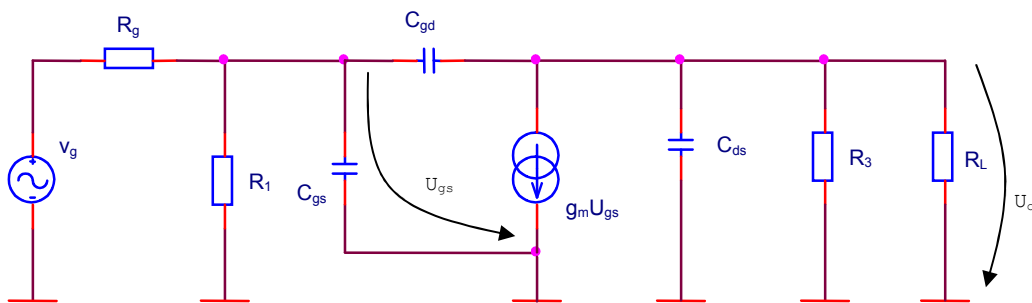


Fig. 9. Schema echivalentă la frecvențe înalte și semnal mic pentru circuitul din fig. 8.

a) Folosind teorema lui Miller se elimină capacitatea C_{gd} rezultând schema echivalentă din fig. 10.

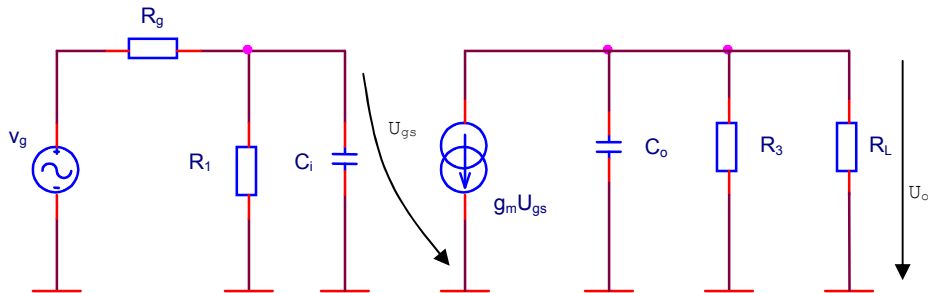


Fig. 10. Schema echivalentă după aplicarea teoremei lui Miller.

$$K = \frac{U_o}{U_i} \text{ și } U_o = -g_m U_{gs} (R_3 \parallel R_L), U_i = U_{gs} \Rightarrow K = A_{U0} = -g_m R_3 \parallel R_L = -5$$

(21)

$$C_{iM} = C_{gd}(1-K) = 30 \text{ pF}, C_{oM} = C_{gd} \left(1 - \frac{1}{K}\right) = 6 \text{ pF}$$

(22)

$$C_i = C_{gs} \parallel C_{iM} = C_{gs} + C_{iM} = 40 \text{ pF}, C_o = C_{ds} \parallel C_{oM} = C_{ds} + C_{oM} = 16 \text{ pF}$$

(23)

Frecvențele introduse de aceste capacități sunt:

$$f_{P1} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot C_i \cdot R_{P1}}, R_{P1} = R_g \parallel R_1 \cong R_g \cong 10 \text{ K}\Omega \Rightarrow f_{P1} = 400 \text{ KHz}$$

(24)

$$f_{P2} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot C_o \cdot R_{P2}}, R_{P2} = R_3 \parallel R_L = 1 \text{ K}\Omega \Rightarrow f_{P2} = 10 \text{ MHz}$$

(25)

Funcția de transfer la înaltă frecvență va fi atunci:

$$A_U(j\omega) = -5 \cdot \frac{1}{\left(1 + j \frac{f}{0.4 \cdot 10^6}\right) \cdot \left(1 + j \frac{f}{10 \cdot 10^6}\right)}$$

(26)

Relația de mai sus este aproximativă deoarece condensatorul C_{gd} introduce și o frecvență de zero.

Frecvența de trecere la înalte se poate aproxima prin $f_{P1} = 400 \text{ KHz}$ sau se poate calcula pe baza definiției:

$$|A_U(j\omega)|_{f=f_i} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{U0} \Rightarrow f_i = 393,7\text{KHz}$$

(27)

b) Metoda se aplică, relativ la schema echivalentă la frecvențe înalte, prezentată fig. 9. Se analizează pe rând efectul fiecărei capacități:

b1) Analiza efectului capacității C_{gs} .

Schema echivalentă obținută prin aplicarea metodei constantelor de gol este cea din fig. 11.

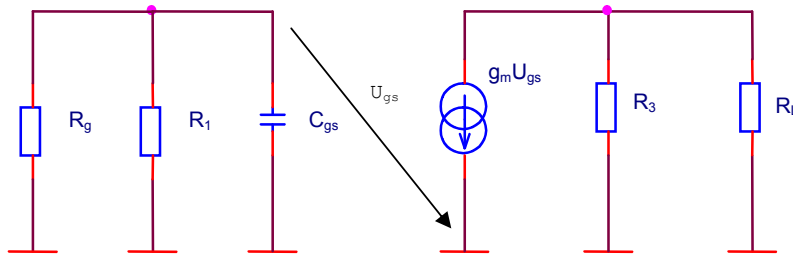


Fig. 11. Schema echivalentă, cazul C_{gs} .

$$f_{P1} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot C_{gs} \cdot R_{P1}}, R_{P1} = R_1 \parallel R_g \cong R_g \cong 10\text{K} \Rightarrow f_{P1} = 1,6\text{MHz}$$

(28)

b2) Analiza efectului capacității C_{gd} .

Schema echivalentă obținută prin aplicarea metodei constantelor de gol este prezentată în fig. 12.

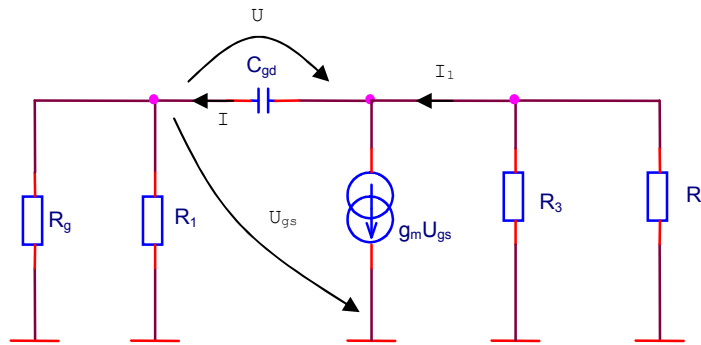


Fig. 12. Schema echivalentă, cazul C_{gd} .

$$f_{P2} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot C_{gd} \cdot R_{P2}}, R_{P2} = \left| \frac{U}{I} \right|$$

(29)

Aplicând teoremele lui Kirchoff se pot scrie următoarele relații:

$$-i \cdot R_g \parallel R_1 + u_{gs} = 0 \Rightarrow u_{gs} = i \cdot R_g \parallel R_1$$

(30)

$$I_1 = g_m \cdot u_{gs} + I = I(1 + g_m \cdot R_g \parallel R_1)$$

(31)

$$U - I \cdot R_g \parallel R_1 - I_1 \cdot R_3 \parallel R_L = 0 \Rightarrow U = I \cdot R_g \parallel R_1 + I \cdot (1 + g_m \cdot R_g \parallel R_1) \cdot R_3 \parallel R_L$$

(32)

$$R_{P2} = \frac{U}{I} = R_g \parallel R_1 + (1 + g_m \cdot R_g \parallel R_1) \cdot R_3 \parallel R_L = 61K\Omega \Rightarrow f_{P2} = 524,6KHz$$

(33)

b3) Analiza efectului capacității C_{ds}

Schema echivalentă obținută prin aplicarea metodei constantelor de gol este cea din fig. 13.

$$f_{P3} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot C_{ds} \cdot R_{P3}}, R_{P3} = R_3 \parallel R_L = 1K \Rightarrow f_{P3} = 16MHz$$

(34)

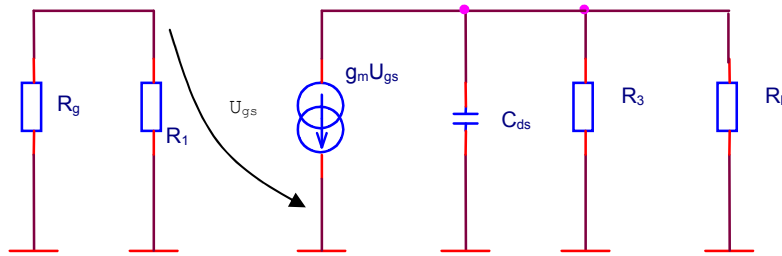


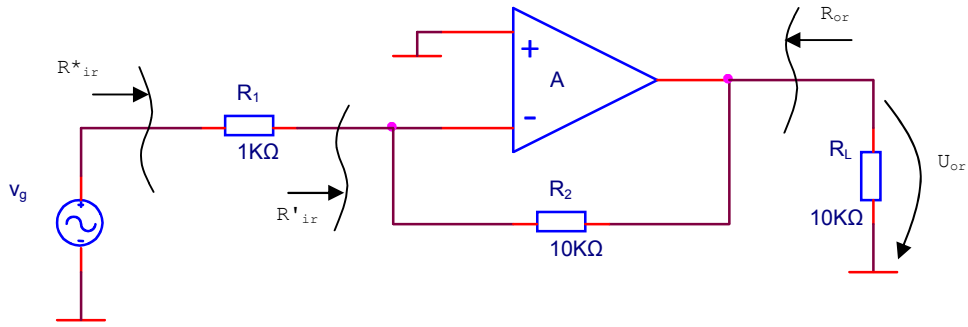
Fig. 13. Schema echivalentă, cazul C_{ds} .

Efectul cumulativ al celor trei capacități se determină astfel:

$$\frac{1}{f_i} = \frac{1}{f_{i1}} + \frac{1}{f_{i2}} + \frac{1}{f_{i3}} \Rightarrow f_i \cong 385,2KHz.$$

12. Amplificatorul A , din figura de mai jos este considerat după o schemă de cuadripol având $R_i = 1K\Omega$, amplificarea de tensiune $A_u = 100$ și $R_o = 0,1K\Omega$ și variația relativă a amplificării de tensiune este $\frac{\Delta A_u}{A_u} = 20\%$. Să se calculeze la frecvențe medii

mărimile: $A_{Ugr} = \frac{u_o}{v_g}, R_{ir}^*, R_{or}, \frac{\Delta A_{Ugr}}{A_{Ugr}}.$



Bibliografie: Seminar 4, pag. 2
https://intranet.etc.upt.ro/~CEF_A/

Rezolvare:

- Se identifică cuadripolul de reacție pe baza faptului că acesta aduce o fracțiune din tensiunea de la ieșirea amplificatorului înapoi la intrare. Acest lucru este realizat de R_2 .

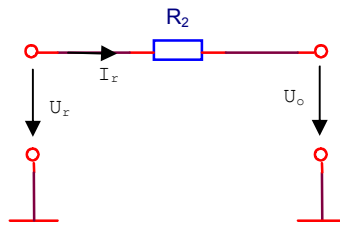


Fig. 2. Cuadripolul de reacție.

- Se redesenează schema amplificatorului ținând cont de influența pasivă a cuadripolului de reacție.

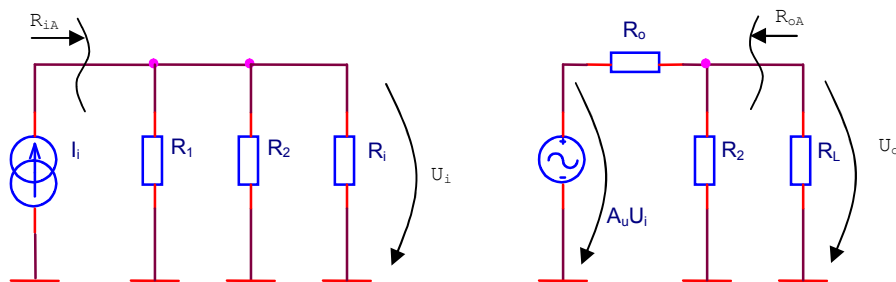


Fig. 3. Schema echivalentă, cu influența cuadripolului de reacție inclusă, pentru circuitul din fig. 1.

Pentru această schemă fără reacție se calculează mărimile de interes:

$$R_{iA} = R_1 \parallel R_2 \parallel R_i = 0,47 \text{ k}\Omega$$

$$R_{oA} = R_2 \parallel R_o \cong 100 \Omega$$

$$Z_T = \frac{U_o}{I_i} = \frac{A_u U_i \frac{R_L \parallel R_2}{R_o + R_L \parallel R_2}}{-\frac{U_i}{R_1 \parallel R_2 \parallel R_i}} = -A_u \frac{R_L \parallel R_2}{R_o + R_L \parallel R_2} \cong -46,7 \text{ k}\Omega$$

$$\beta = \left. \frac{I_r}{U_o} \right|_{U_r=0} = \frac{I_r}{-I_r R_2} = -\frac{1}{R_2} = -0,1 (\text{k}\Omega)^{-1}$$

- Se obțin parametrii amplificatorului cu reacție:

$$Z_{T_r} = \frac{Z_T}{1 + \beta Z_T} \cong -8,24 \text{ k}\Omega, R_{i_r} = \frac{R_{iA}}{1 + \beta Z_T} \cong 84 \Omega, R_{o_r} = \frac{R_{oA}}{1 + \beta Z_T} \cong 17,6 \Omega$$

$$R_{i_r}^* = R_1 + R_{i_r}'$$

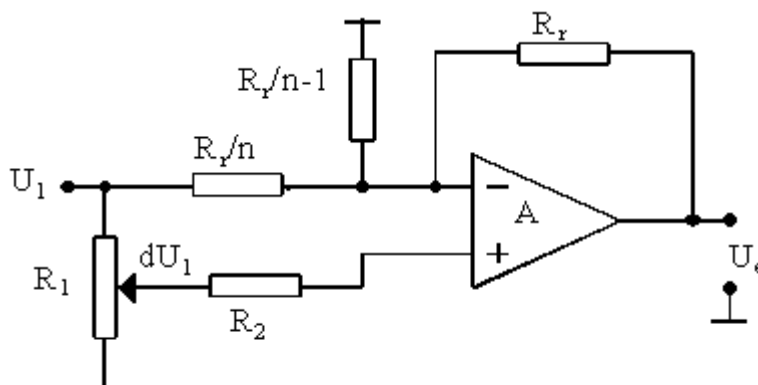
$$R_{i_r} = R_1 \parallel R_{i_r}' \cong R_{i_r}' \Rightarrow R_{i_r}^* = R_1 + R_{i_r}' \cong R_1$$

$$A_{U_{gr}} = \frac{U_o}{I_g} \cdot \frac{I_g}{v_g} = Z_{T_r} \cdot \frac{1}{R_1} = -8,24$$

$$\frac{\Delta A_{U_{gr}}}{A_{U_{gr}}} = \frac{1}{1 + \beta Z_T} \cdot \frac{\Delta A_U}{A_U} = 3,5\%$$

CIRCUITE INTEGRATE ANALOGICE

Problema 1. Pentru circuitul din figură se cer: a) Amplificarea de tensiune $A_{ur} = \frac{U_e}{U_1}$. b) Valorile lui A_{ur} pentru pozițiile extreme și la mijloc ale cursorului, apoi valoarea minimă a lui "n". c) Condiția de erori minime pentru rezistențe.



Soluție

a) Tensiunea de ieșire a amplificatorului cu introducerea unei divizări "d" la potențiometrul R_1 este:

$$U_e = -U_1 \frac{R_r}{R_r} + dU_1 \left(1 + \frac{R_r}{R_{ech}} \right) \quad \text{în care} \quad \frac{1}{R_{ech}} = \frac{n}{R_r} + \frac{n-1}{R_r} \rightarrow R_{ech} = \frac{R_r}{2n-1}$$

Cu aceasta:

$$U_e = -nU_1 + dU_1(1+2n-1) = n(2d-1)U_1 \quad \text{și} \quad A_{ur} = \frac{U_e}{U_1} = n(2d-1)$$

b) Pentru pozițiile impuse cursorului avem:

-sus, $d=1$ și $A_{ur} = +n$

-la mijloc, $d=0,5$ și $A_{ur} = 0$

-jos, $d=0$ și $A_{ur} = -n$

Prin urmare, este vorba de un amplificator cu amplificare programabilă prin potențiometrul R_1 .

c) Condiția de erori minime, în cazul existenței unui potențiometru în circuitele de intrare, se scrie pentru situația în care erorile contează cel mai mult, adică, atunci când

tensiunea de ieșire a amplificatorului este minimă în valoare absolută. Aici corespunde cazului cu cursorul la mijloc . Deci:

$$R_{ech} \parallel R_r = R_2 + \left(R_1/2 \parallel R_1/2 \right) = R_2 + R_1/4$$

Problema2. Să se alcătuiască schema cu AO care realizează calculul cu tensiuni conform expresiei

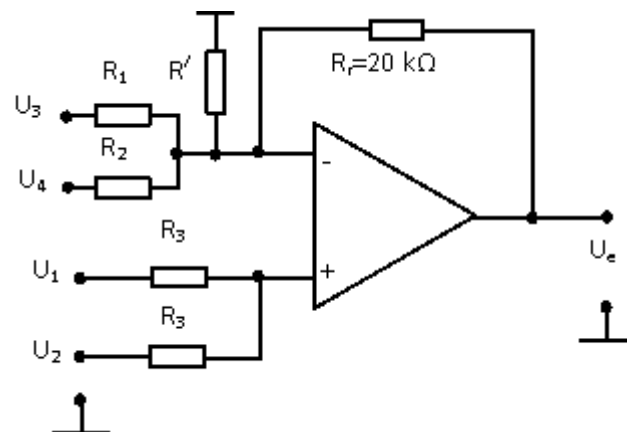
$$U_e = 1,5U_1 + 1,5U_2 - 0,25U_3 - 0,75U_4$$

și să se stabilească valorile rezistențelor dacă rezistența de reacție se adoptă de 20kΩ. Se va verifica dacă schema se poate concepe cu un singur AO și, dacă este cazul, se va alcătui cu mai multe AO. Să se hasureze rezistențele ce trebuie să fie de precizie mare.

Soluție

Dacă toate tensiunile cu semn plus din expresie (n la număr) au același coeficient **a** iar coeficienții tensiunilor cu semn minus, notați **b_i** (oricâți) îndeplinesc inegalitatea $na > 1 + \sum b_i$ atunci schema se poate face cu un singur AO. Pentru cazul concret dat $2 \cdot 1,5 > 1 + 0,25 + 0,75$ deci acest lucru este posibil.

Schema va avea forma din figură, unde, rezistența R' are rolul de a face independenți coeficientul tensiunilor cu semn plus față de coeficienții tensiunilor cu semn minus. Pentru schema dată se poate scrie direct expresia:



$$U_e = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \left(1 + \frac{R_r}{R_{ech}} \right) - \frac{R_r}{R_1} U_3 - \frac{R_r}{R_2} U_4 \quad \text{cu} \quad R_{ech} = R_1 \parallel R_2 \parallel R'$$

Având $R_r=20\text{k}\Omega$, rezultă prin identificarea în cele două expresii a coeficienților tensiunilor cu semn minus:

$$\frac{R_r}{R_1}=0,25 \text{ deci } R_1=\frac{20}{0,25}=80\text{k}\Omega \text{ și } \frac{R_r}{R_2}=0,75 \text{ deci } R_2=\frac{20}{0,75}=26,6\text{k}\Omega$$

Prin identificarea coeficientului tensiunilor cu semn plus rezultă:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{R_r}{R_{ech}}\right)=1,5 \text{ sau } \frac{R_r}{R_{ech}}=2 \text{ deci } R_{ech}=10\text{k}\Omega.$$

Din R_{ech} se obține rezistența R' : $80\text{k}\Omega \parallel 26,6\text{k}\Omega \parallel R'=10\text{k}\Omega$ și $R'=20\text{k}\Omega$.

Rezistența R_3 , care nu apare implicit în expresia tensiunii de ieșire, se calculează din condiția de erori minime:

$$R_3 \parallel R_3 = R_{ech} \parallel R_r \text{ sau } 0,5R_3 = 10\text{k}\Omega \parallel 20\text{k}\Omega \text{ sau } 0,5R_3 = 6,66\text{k}\Omega \text{ ori } R_3 = 13,32\text{k}\Omega.$$

Toate rezistențele (inclusiv cele două R_3 care trebuie să fie perfect egale pentru precizia însumării !) trebuie să fie de precizie mare deci trebuie hasurate pe schema dată.

CIRCUITE INTEGRATE DIGITALE

1. Să se proiecteze un numărător asincron modulo 51. Acesta va fi prevăzut cu un circuit de reacție care va permite ștergerea numărătorului după aplicarea a p impulsuri de tact. Se vor reprezenta grafic formele de undă ale semnalelor CLK , X_1 , X_2 pentru impulsurile de tact 50 – 53.

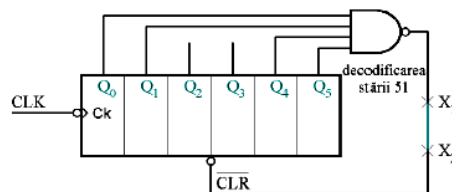
Numărul de bistabile necesare n este: $2^{n-1} < 51 < 2^n$. Relația este îndeplinită pentru $n=6$ ($32 < 51 < 64$).

Funcționarea numărătorului cu $p=51$ implică resetarea sa după aplicarea celui de al 51-lea impuls de tact. Acest lucru este posibil prin **identificarea stării 51** cu ajutorul unui circuit (o poartă ȘI/ȘI-NU) și **ștergerea numărătorului** prin activarea liniei /CLR.

Tabelul de funcționare al numărătorului este:

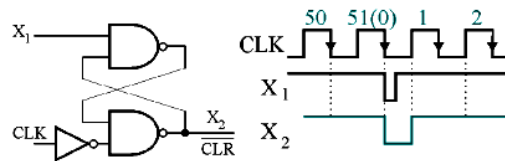
Nr. impuls tact	Q_5	Q_4	Q_3	Q_2	Q_1	Q_0
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
...						
50	1	1	0	0	1	0
51 (0)	$1 \rightarrow 0$	$1 \rightarrow 0$	0	0	$1 \rightarrow 0$	$1 \rightarrow 0$

Determinarea acestei stări se face cu o poartă ȘI-NU cu 4 intrări conectate la ieșirile Q_5 , Q_4 , Q_1 , Q_0 care sunt simultan pe „1” doar când apare stare 51. În acel moment se activează intrarea /CLR (ieșirea porții ȘI-NU este „0” doar în această stare) care șterge numărătorul transformând starea 51 în starea 0. În acest fel numărul stărilor distincte ale numărătorului este redus la 51.



Schema prezentată nu prezintă o funcționare sigură datorită dispersiei timpilor de propagare t_{CLR-Q} . Bistabilul cu timpul de propagare cel mai scurt se șterge primul și ieșirea sa Q (care este una din intrările porții ȘI-NU) trece pe „0”. Astfel, ieșirea porții trece pe „1” și întrerupe procesul de resetare integrală a numărătorului (celelalte bistabile nu se mai șterg).

Pentru înlăturarea acestui dezavantaj este necesar un circuit de memorare a semnalului de ștergere (/CLR) pe o durată care să fie mai mică decât perioada impulsului de tact, dar suficient de mare pentru ștergerea sigură a tuturor bistabilelor. Acest circuit – un bistabil /S/R se intercalează între X_1 și X_2 .



2. Folosind memorii SRAM 6264 (de tip 8k x 8 biți) și un număr minim de circuite logice, să se obțină o memorie de 32k x 8 biți.

a). Numărul necesar de circuite 6264 este:

$$N = \frac{32k \times 8 \text{ biți}}{8k \times 8 \text{ biți}} = 4$$

b). Memoria de 8k are $2^3 \cdot 2^{10} = 2^{13}$ locații de memorie care pot fi accesate utilizând 13 linii de adresă (A_0, \dots, A_{12}).

Memoria de 32k are $2^5 \cdot 2^{10} = 2^{15}$ locații de memorie, adică 15 linii de adresă.

Adresele suplimentare, A_{14} și A_{13} , decodificate cu ajutorul unui decodificator 2/4 (figura 6), se folosesc pentru validarea celor patru memorii conform tabelului 3.

Tabelul 3. Tabelul de validare a memoriei SRAM de 32k x 8 biți.

A_{14} A_{13} $A_{12} - A_0$	Memoria validată	Condiția de validare			
		\overline{CE}_0	\overline{CE}_1	\overline{CE}_2	\overline{CE}_3

0	0	X..... X	0	0	1	1	1
0	1	X..... X	1	1	0	1	1
1	0	X..... X	2	1	1	0	0
1	1	X..... X	3	1	1	1	1

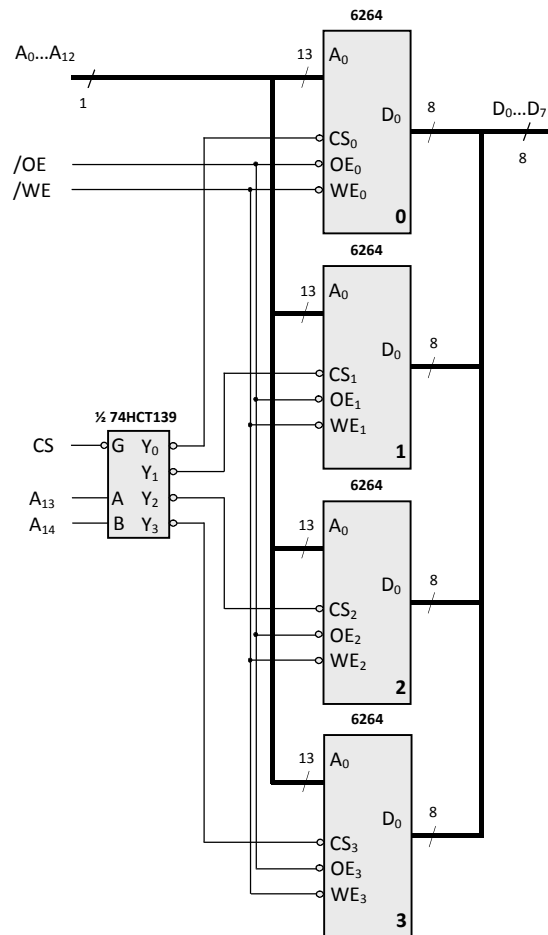


Figura 6. Memorie SRAM de capacitate 32k x 8 biți.

SEMNALE SI SISTEME

1. Există semnale neidentic nule, a căror convoluție să fie identic nulă ?

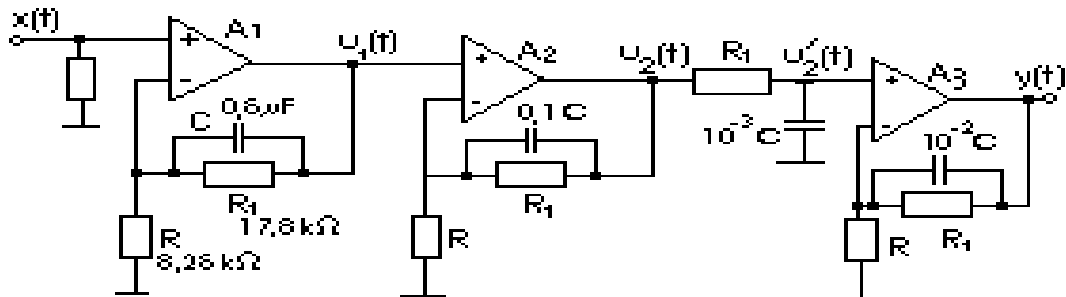
Da.

După cum se știe, operației de convoluție în domeniul timp, îi corespunde operația de înmulțire în domeniul frecvență. Fie, de exemplu, semnalele $x_1(t)$ și $x_2(t)$ cu spectrele $X_1(\omega) = p_{\omega_0}(\omega)$ și $X_2(\omega) = p_{\omega_1}(\omega - \omega_2)$ cu $\omega_2 > \omega_0 + \omega_1$. Se constată că cele două spectre au suporturi disjuncte. De aceea, produsul celor două spectre este identic nul. Aplicând acestui produs transformata Fourier inversă, rezultă că $x_1(t) * x_2(t) \equiv 0$. Dacă se calculează și transformatele Fourier inverse ale funcțiilor $X_1(\omega)$ și $X_2(\omega)$ se obțin expresiile analitice ale celor două semnale și se constată că nici unul dintre acestea nu este identic nul.

2. Poate fi construit un filtru trece-jos a cărei caracteristică de modul să scadă cu 10 dB/dec. ?

Da.

Se consideră sistemul din figură. Amplificatoarele operaționale se consideră ideale.



Referindu-ne numai la primul etaj se știe că:

$$H_1(\omega) = \frac{U_1(\omega)}{X(\omega)} = 1 + \frac{Z_{r1}(\omega)}{X(\omega)}; Z_{r1}(\omega) = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C} = \frac{R_1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}; \omega_1 = \frac{1}{R_1 C}$$

Prin urmare:

$$H_1(\omega) = 1 + \frac{R_1}{R(1 + j\omega R_1 C)} = \frac{R + R_1}{R} \cdot \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}; \omega_2 = \frac{1}{R_1 C}; R_P = \frac{R R_1}{R + R_1}$$

Răspunsul în frecvență al primului etaj este deci:

$$H_1(\omega) = A \frac{1 + j(\omega / \omega_2)}{1 + j(\omega / \omega_1)}$$

În mod asemănător se determină răspunsurile în frecvență ale etajelor realizate cu amplificatoarele A_2 și A_3 . Deoarece rezistențele din schemă sunt aceleași iar capacitatea scade de 10 ori respectiv de 100 de ori, frecvențele de tăiere ce intervin cresc de 10 ori respectiv de 100 de ori:

$$H_2(\omega) = A \frac{1 + j \frac{\omega}{10 \omega_2}}{1 + j \frac{\omega}{10 \omega_1}} ; H_3(\omega) = A \frac{1 + j \frac{\omega}{100 \omega_2}}{1 + j \frac{\omega}{100 \omega_1}}$$

În cazul de față avem patru subsisteme conectate în cascadă. Pentru ele, răspunsul în frecvență echivalent $H(\omega)$ este:

$$H(\omega) = A^3 \frac{(1 + j \frac{\omega}{\omega_2})(1 + j \frac{\omega}{10 \omega_2})(1 + j \frac{\omega}{100 \omega_2})}{(1 + j \frac{\omega}{\omega_1})(1 + j \frac{\omega}{10 \omega_1})(1 + j \frac{\omega}{100 \omega_1})(1 + j \frac{\omega}{1000 \omega_1})}$$

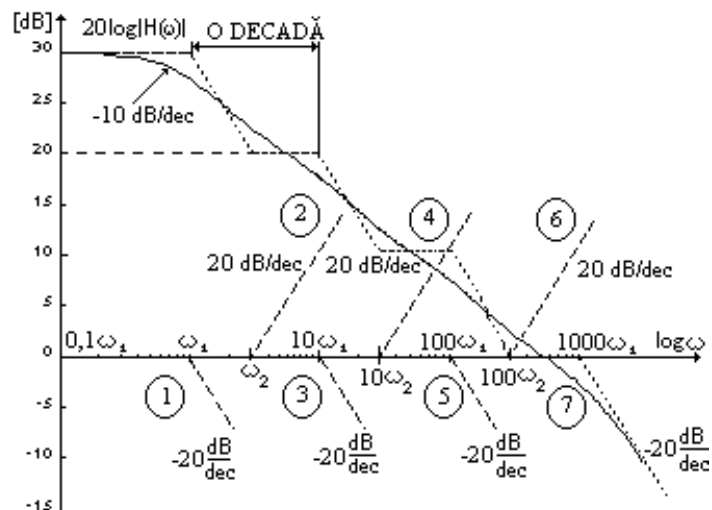
Elementele schemei se aleg astfel încât: $\omega_2 = 3,162 \omega_1$. Rezultă $A = 3,162$.

Deoarece $\lg 3,162 = 0,5$, rezultă că ω_2 se plasează, în scară logaritmică la jumătatea distanței între ω_1 și $10\omega_1$. Se calculează $20 \lg A^3 = 60 \lg 3,162 = 60 \times 0,5 = 30 \text{dB}$ și se obține pentru modulul răspunsului în frecvență, în scări logaritmice, expresia:

$$20 \lg |H(\omega)| = 30 - 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right] + 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right] - 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\omega}{10 \omega_1} \right)^2 \right] +$$

$$+ 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\omega}{10 \omega_2} \right)^2 \right] - 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\omega}{100 \omega_1} \right)^2 \right] - 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\omega}{1000 \omega_1} \right)^2 \right]$$

Caracteristica de modul corespunzătoare este prezentată în figura următoare. Cu excepția valorii inițiale de +30dB, nemarcată în figură, toți ceilalți 7 termeni sunt marcați, în ordinea în care apar în ultima relație. Termenii **1, 3, 5 și 7** corespund unor linii frânte ce cad cu 20dB/decadă începând cu frecvențele de tăiere (frângere) ω_1 , $10\omega_1$, $100\omega_1$ și, respectiv $1000\omega_1$. Însușind toate cele 7 caracteristici, și adunând valoarea inițială de 30 dB, se obține o caracteristică ce poate fi aproximată cu caracteristica desenată cu linie plină. Deoarece frecvențele ω_2 , $10\omega_2$ și $100\omega_2$ sunt logaritmic plasate la jumătate între ω_1 și $10\omega_1$, $10\omega_1$ și $100\omega_1$ respectiv $100\omega_1$ și $1000\omega_1$, caracteristica cade, în medie, cu 10 dB/decadă.



Cu linie - punctată este marcată în figură caracteristica medie. Aproximarea este valabilă pe trei decade.

Sisteme de prelucrare numerică cu procesoare - Subiecte de tip studiu de caz sau problema

1. Să se scrie o secvență de program în limbajul C pentru microcontrolerul MSP430G2231 care completează stările liniilor 0 și 6 ale portului 1 (la care sunt conectate 2 led-uri; inițial 1 led este aprins, celălalt este stins) cu frecvența de temporizare de 10 Hz, stabilită de registrul numărător TAR. Acesta este în modul de lucru *up* și are SMCLK ca semnal de tact (1 MHz).

Se cunosc funcțiile biților de interes din registrul **TACTL**:

Biții **TASSELx** (biții 9-8) selectează semnalul de tact al numărătorului de 16 biți astfel:

0 0, TACLK (semnal extern, aplicat la un pin dedicat)

0 1, ACLK

1 0, SMCLK

1 1, INCLK (TACLK inversat)

Biții **IDx** (biții 7-6) selectează factorul de divizare al semnalului de tact al numărătorului de 16 biți astfel:

0 0, divizare cu 1

0 1, divizare cu 2

1 0, divizare cu 4

1 1, divizare cu 8

Biții **MCx** (biții 5-4) selectează modul de lucru al numărătorului de 16 biți astfel:

0 0 stop, numărătorul nu funcționează

0 1 modul *up*

1 0 modul *continuous*

1 1 modul *up-down*

Bitul **TAIFG** (bitul 0), devine 1 la depășirea sau anularea registrului numărător TAR.

Elemente de programare la nivel de bit necesare pentru rezolvare:

Așteptarea în buclă până când un bit dintr-un registru trece pe nivelul 1 logic:

```
while ((Nume_registru & masca) == 0); //masca va conține 1 logic  
în poziția bitului care trebuie să devină 1 și 0 în rest
```

Punerea pe 0 logic (ștegere) a unui bit sau a unui grup de biți dintr-un registru, fără a modifica ceilalți biți existenți în registrul respectiv:

```
Nume_registru=Nume_registru & masca; //masca va conține 0 logic  
în pozițiile biților (bitului)care trebuie să fie șterși și 1 în rest
```

Complementarea valorii unui bit sau grup de biți:

```
Nume_registru=Nume_registru ^ masca; //masca va conține 1 logic  
în pozițiile biților (bitului)care trebuie să fie complementați și 0 în rest
```

[1], pag. 100.

Rezolvare:

Se cunoaște $T = \frac{(TACCR0)+1}{f_{CLK}}$

Se obține $TACCR0+1 = T \times f_{CLK} = f_{CLK} / f = 1 \text{ MHz} / 10 \text{ Hz} = 100\ 000$. Această valoare depășește numărul maxim de 16 biți (65535) care poate fi înscris în registrul TACCR0.

Ca urmare, trebuie realizată o divizare a frecvenței semnalului SMCLK, cu 2, de exemplu. Rezultă $f_{CLK} = 500 \text{ KHz}$.

Astfel: $TACCR0+1 = T f_{CLK} = f_{CLK} / f = 500 \text{ kHz} / 10 \text{ Hz} = 50\ 000$, sau $TACCR0 = 49999$.

Conținutul registrului TACTL:
10 0101 0000 = 250h
SMCLK;
Divizare cu 2;
modul *up*

Programul este prezentat în continuare

```
void main( void )
{
    WDTCTL = WDTPW + WDTHOLD; // Stop watchdog timer
    BCSC1L1 = CALBC1_1MHZ; // calibrare oscilator
    DCOCTL = CALDCO_1MHZ;

    P1OUT=0;
    P1DIR=0x41; //P1DIR.6=1, P1.6 iesire; P1DIR.0=1, P1.0 iesire
    P1OUT=0x40; // P1OUT; starea inițială, P1OUT.6=1, P1OUT.0=0

    TACCR0=49999; //TAR numara pâna la 49999
    TACTL=0x250; //TASSELx=10b, SMCLK; IDx=01b, diviz. cu 2;
                    //MCx=01, modul up

    for(;;) {
        P1OUT=P1OUT^0x41; //complementeaza bitii 6 si 0 din reg. P1OUT
        while((TACTL&0x0001)==0x0000); //asteapta ca TAIFG=1
        TACTL=TACTL&0xFFFE; //sterge TAIFG
    }
}
```

2. Să se scrie un program pentru microcontrolerul MSP430G2231 care configurează unitatea CCR1 a modului Timer_A pentru a genera un semnal dreptunghiular, folosind modul „reset-set”. Registrul numărător TAR este în modul de lucru *up* și are SMCLK ca semnal de tact (1 MHz). Ieșirea unității CCR1, notată OUT1, este disponibilă la pinul P1.2 dacă P1DIR.2=1 și P1SEL.2=1. Perioada semnalului generat trebuie să fie de 50 μs iar factorul de umplere de 0,2. Să se deseneze forma semnalului generat, corelat cu conținutul registrului numărător TAR.

Se cunosc funcțiile biților de interes din registrul TACTL:

Biții TASSELx (biții 9-8) selectează semnalul de tact al numărătorului de 16 biți astfel:

0 0, TACLK (semnal extern, aplicat la un pin dedicat)

0 1, ACLK

1 0, SMCLK

1 1, INCLK (TACLK inversat)

Biții IDx (biții 7-6) selectează factorul de divizare al semnalului de tact al numărătorului de 16 biți astfel:

0 0, divizare cu 1

0 1, divizare cu 2

1 0, divizare cu 4

1 1, divizare cu 8

Biții MCx (biții 5-4) selectează modul de lucru al numărătorului de 16 biți astfel:

0 0 stop, numărătorul nu funcționează
 0 1 modul *up*
 1 0 modul *continuous*
 1 1 modul *up-down*

Se cunoaște că în registrul TACCTL1, biții **OUTMODx**, care permit selecția modului de lucru al ieșirii ocupă pozițiile 7-5. În continuare, se prezintă valorile biților pentru două dintre modurile de lucru.

OUTMODx	modul de lucru
011	set-reset
....	
111	reset-set

Toate instrucțiunile necesare în program sunt de forma `Registru = valoare;`

[1], pag. 101-102.

Rezolvare:

Se știe că perioada semnalului generat este $T=(TACCR0+1)/f_{CLK}$.

Se obține $TACCR0+1=T \times f_{CLK}=50 \mu s \times 1 \text{ MHz}=50$, adică $TACCR0=49$; rezultă că nu este necesară o divizare a semnalului de tact.

Se știe că factorul de umplere al semnalului generat este:
 $f_u=(TACCR1+1)/(TACCR0+1)$.

Se obține $TACCR1+1=f_u (TACCR0+1)=0,2 \times 50=10$, adică $TACCR1=9$

Conținutul registrului TACTL:

10 0001 0000 = 210h

SMCLK;

Divizare cu 1;

modul *up*

Conținutul registrului TACCTL1:

1110 0000 = E0h

reset-set;

Programul este prezentat în continuare

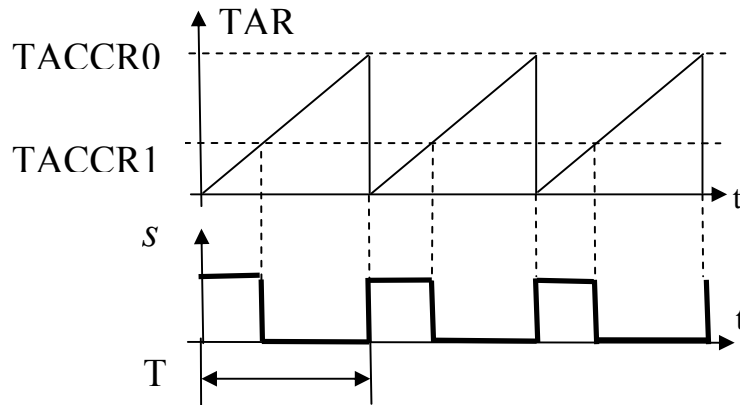
```
void main( void )
{
  WDCTL = WDTW + WDTOLD; // Stop watchdog timer
  BCCTL1 = CALBC1_1MHZ; // calibrare oscilator
  DCOCTL = CALDCO_1MHZ;

  P1DIR = 0x04 ; P1DIR.2=1
  P1SEL = 0x04 ;P1SEL.2=1, stabil funcție OUT1 pentru pinul P1.2
  TACCR0 = 49; TAR numara pana la 49, apoi OUT1 comută
  TACCR1 = 9; cealaltă comutare a lui OUT1: cand TAR=9

  TACTL = 0x210; TASSELx=10b, SMCLK; MCx=01b, modul „up”
  TACCTL1 = 0xE0; OUTMODx=111b, modul de ieșire reset-set
  for(;;){}
```

}

Semnalul generat, corelat cu conținutul registrului numărător TAR:



Bibliografie:

- [1] S.Mischie, C. Dughir, G. Vasiu, R.Pazsitka, Microcontrolere MSP430. Teorie și Aplicații, Editura Politehnica 2012
- [2] L1.pdf, în https://intranet.etc.upt.ro/~SPNP_B/Laborator

Discipline de specialitate